

- 1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. **NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.**
- 2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
- 3) Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
- 4) I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
- 5) I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 10**.
- 6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!
Da riempirsi da parte dello studente

Nome: _____ Cognome: _____

Indirizzo: _____ Città: _____

Scuola: _____ Anno di corso: _____ Città: _____

e-mail: _____

Risposte ai primi 14 quesiti

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| | | | | | | | | | | | | | |

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

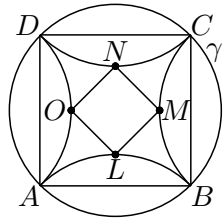
| | | | |
|--------------------------------------|--|------|--|
| numero delle risposte esatte (1-14) | | ×5 = | |
| numero degli esercizi senza risposta | | ×1 = | |
| valutazione esercizio n.15 | | | |
| valutazione esercizio n.16 | | | |
| valutazione esercizio n.17 | | | |
| PUNTEGGIO TOTALE | | | |

Si ringrazia per la collaborazione

ENI

Visitate il sito internet delle olimpiadi: <http://olimpiadi.dm.unibo.it>

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Quanti interi n sono tali che \sqrt{n} differisce da $\sqrt{101}$ per meno di 1?
 (A) 19 (B) 21 (C) 40 (D) 41 (E) 42.
2. Il perimetro di un rombo è 32 cm e ciascuno dei due angoli acuti misura 30° . Quanto vale il volume del solido ottenuto facendo ruotare il rombo intorno a un suo lato?
 (A) $128\sqrt{3}\pi$ (B) 128π (C) $64(\sqrt{3}-1)\pi$ (D) 64π (E) $32\sqrt{3}\pi$.
3. Nell'ultimo capodanno, andavano molto di moda degli occhiali con la forma del numero "2009" e le lenti al posto dei due zeri. Per fabbricare occhiali simili, è necessario che nel numero che rappresenta l'anno vi siano due o più zeri consecutivi (per esempio 3500 va bene, 2010 no). Quanti anni compresi tra l'anno 999 e l'anno 9999 contengono due o più zeri consecutivi nella loro scrittura?
 (A) 171 (B) 180 (C) 190 (D) 191 (E) 200.
4. A un tavolo, vi sono quattro persone: Luca, Maria, Nicola e Paola. Ognuno dei quattro mente sempre, oppure non mente mai. Inoltre non amano parlare di loro stessi, ma piuttosto dei loro amici; tant'è che quando gli viene chiesto chi di loro menta sempre, le loro risposte sono:
 Luca: "ogni ragazza è sempre sincera"
 Maria: "ogni ragazzo è sempre bugiardo"
 Nicola: "c'è una ragazza che mente sempre, l'altra è sempre sincera"
 Paola: "uno dei ragazzi è sempre sincero, l'altro mai".
 Sapreste dire quanti al tavolo sono sempre sinceri?
 (A) Nessuno (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) tutti.
5. Un quadrato $ABCD$ di lato 1 è inscritto in una circonferenza γ . Si costruiscano i simmetrici degli archi \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CD} , \widehat{DA} di γ rispetto ai lati AB , BC , CD , DA rispettivamente. Indichiamo con L , M , N , O i punti medi degli archi così ottenuti; quanto vale l'area di $LMNO$?
 (A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (B) $\sqrt{2}-1$ (C) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $3-2\sqrt{2}$.
 
6. Un'urna contiene N palline ($N > 3$) numerate da 1 a N . Se dall'urna vengono tolte due palline recanti numeri non multipli di 3 e una recante un multiplo di 3, la probabilità di ottenere un multiplo di 3 estraendo una singola pallina risulta minore di quanto era con l'urna completa. Cosa si può dedurre riguardo a N ?
 (A) N è certamente multiplo di 3
 (B) N non è multiplo di 3
 (C) N è certamente dispari
 (D) N è certamente pari
 (E) nessuna delle affermazioni precedenti può essere dedotta.
7. Determinare il più grande intero n con questa proprietà: esistono n interi positivi distinti a_1, \dots, a_n tali che, comunque se ne scelgano fra essi due distinti, né la loro somma né la loro differenza siano divisibili per 100.
 (A) 49 (B) 50 (C) 51 (D) 99 (E) 100.
8. Il minuscolo, ma preziosissimo, Diamante Dodecaedrico si trova a 2 metri dalla parete sud e 3 metri dalla parete ovest di una stanza rettangolare le cui pareti nord e sud sono lunghe 4 metri e quelle est e ovest sono lunghe 3 metri. Un ladro si cala dal soffitto all'interno della stanza e tocca il pavimento a un metro dalla parete sud e a un metro dalla parete ovest. Si accorge però che deve immediatamente disattivare il sistema di allarme, tagliando almeno in un punto un filo che corre ad altezza da terra costante lungo le quattro pareti perimetrali della stanza. Quanti metri è lungo il percorso più breve che deve compiere per raggiungere prima un punto qualsiasi di una delle pareti, e poi il Diamante Dodecaedrico?
 (A) $3+\sqrt{2}$ (B) $2+\sqrt{5}$ (C) $\sqrt{17}$ (D) $\sqrt{13}$ (E) $2\sqrt{2}$.

9. Quanti interi positivi n hanno la proprietà che la loro rappresentazione in base 2 coincide con la rappresentazione in base 3 di $2n$?
 (A) Nessuno (B) 1 (C) 2 (D) più di 2, ma in numero finito (E) infiniti.
10. Alberto, Barbara e Carlo stanno giocando a carte. Ad ogni mano, il vincitore guadagna 2 punti, mentre gli altri due giocatori perdono un punto a testa. Inizialmente, tutti hanno 0 punti. Qual è la probabilità che, dopo 10 mani, siano nuovamente tutti a zero punti?
 (A) 0 (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{\binom{10}{6}}{3^{10}}$ (E) $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$.
11. Nell'isola Chenonc'è ci sono 2009 abitanti, divisi in tre clan: i furfanti che mentono sempre, i cavalieri che non mentono mai, i paggi che mentono un giorno sì e uno no, in modo indipendente l'uno dall'altro. Un giorno chiedo a ciascuno degli abitanti quanti furfanti sono sull'isola. Il primo dice: "*c'è almeno 1 furfante*"; il secondo dice: "*ci sono almeno 2 furfanti*";... il 2009-esimo dice: "*ci sono almeno 2009 furfanti*". Scrivo in una lista la successione delle 2009 risposte, nell'ordine in cui sono state pronunciate. Il giorno dopo interrogo allo stesso modo tutti gli abitanti (non necessariamente nello stesso ordine), ed ottengo una lista delle risposte identica a quella del giorno precedente. Sapendo che c'è un solo cavaliere sull'isola, quanti paggi ci sono?
 (A) Nessuno (B) 670 (C) 1004 (D) 1338 (E) 1339.
12. Francesco vuole scrivere il polinomio $x^{16} + x$ come prodotto di più polinomi a coefficienti interi, ognuno di grado almeno 1. Quanti fattori potrà ottenere al massimo?
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5.

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Determinare il massimo intero positivo k tale che k^2 divide $\frac{n!}{(n-6)!}$ per ogni $n > 6$.
14. Sia x la più piccola delle due soluzioni dell'equazione $x^2 - 4x + 2 = 0$. Quali sono le prime tre cifre dopo la virgola nella scrittura (in base 10) del numero

$$x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2009}?$$

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

a) Qual è il minimo intero positivo c tale che esista almeno una coppia (a, b) di interi positivi distinti tali che $2c^2 = a^2 + b^2$?

b) Dimostrare che esistono infinite terne (a, b, c) di interi positivi distinti tali che $2c^2 = a^2 + b^2$.

SOLUZIONE

Nome: _____ Cognome: _____

16. ESERCIZIO DIMOSTRATIVO

È dato un triangolo ABC , rettangolo in A e con AC cateto maggiore; sia M il punto medio di BC , N il simmetrico di A rispetto a BC , O l'intersezione fra la perpendicolare ad MN passante per N e la retta contenente BC .

a) Dimostrare che l'angolo OMN è il doppio dell'angolo ACB .

b) Dimostrare che il rapporto fra le aree di MNO e ABC vale un quarto del rapporto fra le lunghezze di BC e HM , dove H è il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa di ABC .

SOLUZIONE

Nome: _____ Cognome: _____

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Determinare tutti gli interi positivi m per i quali sia $\frac{2 \cdot 5^m + 10}{3^m + 1}$ che $\frac{9^m + 1}{5^m + 5}$ sono interi.

SOLUZIONE

Nome: _____ Cognome: _____