Anche questa volta parto con alcune cose da sapere:

- ogni numero intero pari N si può scrivere nel seguente modo: $N = 2k$, con k intero opportuno; mentre se N è un intero dispari si può scrivere come $N = 2h + 1$ con h intero opportuno;
- utilizzando la definizione di quoziente e resto, assegnati due numeri interi p e k esistono, e sono unici, i numeri q (quoziente) e r (resto), tali che risulti: $p = kq+r$, con $0 \leq r < k$.

1. $p = r^2 - q^2 = (r - q)(r + q)$, quindi il risulta: $S = pqr = (r - q)(r + q)qr$.

   Mostriamo che tutti i numeri S sono divisibili per 2.

   Infatti: se o q o r sono pari il prodotto S è pari. In caso contrario i due numeri q e r sono dispari, ma le differenze $q - r$ e $q + r$ sono entrambe pari, quindi S è divisibile per 2.

   Mostriamo che tutti i numeri S sono divisibili per 3.

   Consideriamo il quoziente ed il resto della divisione di q e r per 3, ciascuno dei numeri precedenti può essere scritto nel seguente modo:

   $$q = 3k + s_1,\ r = 3h + s_2$$

   con s_1, s_2 che possono assumere i soli valori 0, 1, 2.

   Se o s_1 o s_2 assumono il valore 0, allora banalmente si dimostra che S è divisibile per 3. Altrimenti consideriamo le seguenti due tabelle, nelle quali vengono riportati i valori delle somme $r - q$ e $r + q$ al variare di s_1 e s_2.

$(r-q)$	$s_1 = 1$	$s_1 = 2$
$s_2 = 1$	$3h - 3k = 3(h - k)\ (*)$	$3h - 3k - 1$
$s_2 = 2$	$3h - 3k + 1$	$3h - 3k = 3(h - k)\ (*)$

$(r+q)$	$s_1 = 1$	$s_1 = 2$
$s_2 = 1$	$3h - 3k + 2$	$3h - 3k + 3 = 3(h - k + 1)\ (*)$
$s_2 = 2$	$3h - 3k + 3 = 3(h - k + 1)\ (*)$	$3h - 3k$

   sono indicati con un asterisco i numeri divisibili per 3 che compaiono nel prodotto S. Quindi possiamo concludere che per ogni scelta degli interi p, q, r il prodotto S è divisibile per 3.

   Unendo la prima parte della dimostrazione e la seconda possiamo quindi concludere che S è divisibile per 6.

2. Indicato con G il baricentro del triangolo, poniamo $\overline{GA} = 2x$ e $\overline{GB} = 2y$, con le condizioni: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Otteniamo, per le note proprietà del baricentro, $\overline{GM} = x$ e $\overline{GN} = y$. L'area del trapezio: $ABMN$ è quindi pari a $S = \dfrac{9}{2}xy$. Tale area risulta anche pari a $\dfrac{3}{4}T$, con T area del triangolo ABC. Possiamo risolvere il problema quando avremo calcolato le misure dei due segmenti GM, GN. Notiamo che i

triangoli NAG e ANB sono retti ed hanno il lato NA in comune; applicando il teorema di Pitagora a tali triangoli, otteniamo:

$$\overline{NA} = y^2 + 4x^2, \overline{NA} = 9y^2 - 1.$$

Sappiamo anche che risulta $4x^2 + y^2 = 1$, in quanto anche il triangolo AGB è retto, quindi possiamo ottenere le misure richieste, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = 1 \\ 9y^2 - 1 = 4x^2 + y^2 \end{cases}.$$

Il sistema ottenuto ammette quali soluzioni: $x = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. L'area del triangolo assegnato è pari a:

$$T = 6xy = 6 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Dato che i quattro numeri a, A_1, A_2, b sono in progressione geometrica possiamo dire che:

$$d = A_1 - a = A_2 - A_1 = b - A_2 = \frac{b-a}{3}.$$

Quindi: $A_1 = a + \frac{b-a}{3} = \frac{b+2a}{3}$ e $A_2 = b - \frac{b-a}{3} = \frac{2b+a}{3}$.

In modo analogo, sapendo che a, G_1, G_2, b sono termini di una progressione geometrica, possiamo dire che:

$$q = \frac{G_1}{a} = \frac{G_2}{G_1} = \frac{b}{G_2} = \sqrt[3]{\frac{b}{a}},$$

e i numeri richiesti sono: $G_1 = a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, $G_2 = a^2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Calcoliamo ora la seguente somma: $S = A_1A_2 - G_1G_2 = \frac{2b+a}{3} \cdot \frac{b+2a}{3} - ab = \frac{2(a^2-2ab+b^2)}{9} = \frac{(b-a)^2}{9}$. Quindi $S > 0$, comunque si scelgono i numeri reali positivi a e b, e risulta:

$$A_1A_2 - G > 1G_2.\text{c.v.d.}$$